

# TEMEL KAVRAMLAR

*Bu bölümde matematiğin en temel kavramları incelenecektir. Temel matematik bilgilerinin kavranması ilerleyen bölümlerde önemli olacağından eksiksiz bilinmesi şarttır. Bu konuda tam sayılarda dört işlem üzerinde durulacaktır ve basamak çözümleri yapılacaktır.*

Doğal sayılar (N)	= {0,1,2,3,...}
Sayma Sayılar (N <sup>+</sup> )	= {1,2,3,...}
Tamsayılar (Z)	= {... -3,-2,-1 0,1,2,3,...}
Rasyonel sayılar (Q)	= {... -3,- $\frac{1}{2}$ ,0, $\frac{1}{5}$ ,5,...}
Reel Sayılar (R)	= {... -3,- $\frac{1}{2}$ ,0, $\frac{1}{5}$ ,5 $\pi$ , $\sqrt{2}$ .}

## TAM SAYILARDA DÖRT İŞLEM

Tam sayılarda dört işlem yapılırken, işlem önceliklerine dikkat edilmelidir.

### İşlem önceliği

1. parantez
2. kuvvet (üslü sayı)
3. çarpma -bölme
4. toplama -çıkarma

**ÖRNEK:**  $3-2 \cdot 2$  işleminin sonucu kaçtır?

**Uyarı:** İşlem önceliğine uyulmayan durumlarda ki öğrenci hatasını görelim.

$$\begin{array}{l} 3-2 \cdot 2 \\ \downarrow \\ 1 \cdot 2 = 2 \quad (\text{HATALI}) \end{array}$$

**ÇÖZÜM:**  $3-2 \cdot 2$   
 $3-4 = -1$

İşlemlerde çarpma, çıkarmadan önceliklidir

**ÖRNEK:**  $7-2[3-6 \div (7-9)]$  işleminin sonucu nedir?

**ÇÖZÜM:** İşlemimiz köşeli büyük parantez tek sayı tek işaret kalıncaya dek çözülmelidir, ardından dış işlemler yapılır.

$$\begin{array}{l} [3-6 \div (7-9)] \\ \downarrow \\ [3-6 : (-2)] \\ \downarrow \\ [3+3] = 6 \\ 7-2 \cdot [6] \Rightarrow 7-12 = -5 \end{array}$$

## Kuvvet (Üslü Sayılar)

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$$

$$(-2^2) = -(2 \cdot 2) = -4$$

Negatif tabanlı sayılarda; kuvvet tek ise sonuç negatif  
Kuvvet çift ise sonuç pozitif

$a^3 \Rightarrow$  negatif ise  $a$  negatif,  
Pozitif ise  $a$  pozitiftir.

$$A^0 = 1 \quad A^1 = A \quad 1^A = 1$$

**ÖRNEK:**  $-(4-6)^2 + (-2)(-3)$  işleminin sonucu kaçtır?

$$\begin{array}{l} -(4-6)^2 + (-2)(-3) \\ \downarrow \quad \downarrow \\ -(-2)^2 + (+6) \\ \downarrow \\ -(+4) + 6 \\ -4 + 6 = 2 \end{array}$$

**ÖRNEK:**  $a^3 b^2 < 0$ ,  $bc^2 > 0$ ,  $ac > 0$  olduğuna göre  $a, b, c$  işaretleri nedir?

**ÇÖZÜM:** \* Tabanı ne olursa olsun kuvveti çift olan sayılar pozitiftir.

$a^3 b^2 < 0$  ifadesi negatif.  $b^2$  pozitif olacağından  $a^3$  negatif olmalıdır ki sonuç negatif olsun. Bu nedenle  $a^3$  negatif ise  $a$  negatiftir.

$ac > 0$  ifadesi pozitiftir.  $a$  nın negatif olduğunu bulmuştuk, demek ki  $c$  de negatif olmalı ki sonuç pozitif olsun. Yani  $c$  negatiftir.

$bc^2 > 0$  ifadesi pozitiftir.  $c^2$  pozitif olduğu için  $b$  pozitif olacaktır.

## Basamak Çözümleme

$$423 = 4 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1$$

$$ABC = A \cdot 100 + B \cdot 10 + C \cdot 1$$

**ÖRNEK:** iki basamaklı bir sayının rakamlarının yerleri değiştirilirse bu sayı 45 küçülüyor. Bu sayının rakamları arasındaki fark nedir?

**ÇÖZÜM:** Sayımız  $ab$  olsun

$$ab - ba = 45$$

$$10a + b - (10b + a) = 45$$

$$10a + b - 10b - a = 45$$

$$9a - 9b = 45$$

$$9(a - b) = 45$$

$$a - b = 5$$

**ÖRNEK:** Üç basamaklı rakamları farklı en büyük çift sayı ile, iki basamaklı en küçük sayının farkı kaçtır?

**ÇÖZÜM:**  $986 - (-99) = 1085$

**ÖRNEK:** Rakamları farklı iki basamaklı birbirinden farklı üç pozitif tamsayının toplamı 108 ise bu sayılardan en büyüğü **en çok kaçtır?**

**ÇÖZÜM:** Üç sayıdan en büyüğünü istediği için diğer iki sayının en küçük olması lazım, o nedenle rakamları farklı iki basamaklı birbirinden farklı pozitif tamsayıları bulalım.

**10+12+X=108 X=86**

**Not: 11 sayısının rakamları aynı olduğundan değerlendirmeye alınmamıştır.**

**ÖRNEK:**  $a, b \in \mathbb{N}$   $a \cdot b = 36$  olduğuna göre  $a+b$  toplamının **en büyük ve en küçük değeri nedir?**

**ÇÖZÜM:**  $a+b$  en büyük olması için  $a=36$   $b=1$  değerini verirsek  $a+b=37$  olur  
En küçük değer için  $a=6$   $b=6$  değerlerini alabilir.  
 $a+b=12$  olur.

## UYGULUMA SORULARI

1.  $\frac{-4 - (-3) + (-2)}{6 \cdot 2}$  işleminin sonucu kaçtır?

2.  $8 - 23 - [-4 - (-3 + 2)]$  işleminin sonucu kaçtır?

3.  $3(-2) - (-4) - [-(7-9) \div (-1)]$  işleminin sonucu kaçtır?

4.  $\frac{(-4)(-2) - 3(-2) + 6 \div (-3)}{-4 \div 2 - (-5 + 3)}$  işleminin sonucu kaçtır?

5.  $\left(\frac{1}{2} + 5^0\right)^2 \cdot (-3^2)$  işleminin sonucu kaçtır?

6.  $(-2^2) + (-3)^2 - 2 \cdot 3$  işleminin sonucu kaçtır?

7.  $(-2)(-3) - 3^2 - [-(4-6)^2]^2$  işleminin sonucu kaçtır?

8.  $a^5 b^4 < 0$ ,  $\frac{b}{c} < 0$ ,  $a \cdot c < 0$  olduğuna göre  $a, b, c$  nin sırasıyla işaretleri nedir?

9.  $a, b \in \mathbb{Z}$   $a \cdot b = 16$  olduğuna göre  $a+b$  toplamının en küçük değeri nedir?

10.  $\frac{abab - baba}{ab - ba}$  işleminin sonucu kaçtır?

11. Üç basamaklı beş doğal sayının her birinin yüzler basamağı 3 artırılır, onlar basamağı 7 azaltılır, birler basamağı 4 artırılırsa **toplamları nasıl değişir?**

### CEVAPLAR

- |                    |         |                |              |
|--------------------|---------|----------------|--------------|
| 1) $-\frac{1}{4}$  | 2) -12  | 3) 0           | 4) $\infty$  |
| 5) $-\frac{81}{4}$ | 6) -1   | 7) -19         | 8) $-, -, +$ |
| 9) -17             | 10) 101 | 11. 1170 artar |              |

# RASYONEL SAYILAR

## TEMEL BİLGİLER

$\frac{a}{b}$  şeklinde gösterilen sayı kümesine denir.

**Sadeleştirme:**  $\frac{32}{12}$  sayısını sadeleştirebiliriz.

Sadeleştirme işlemi yapılırken pay ve payda da ki sayıyı aynı anda bölen sayı ile bölerek kesri en sade hale getiririz.

$$\frac{32 \div 4}{12 \div 4} = \frac{8}{3}$$

**Genişletme:** Sadeleştirmenin tam tersidir.

$$\frac{8}{3} \text{ ü genişletelim: } \frac{8 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{32}{12}$$

**Uyarı:** Pay ve Payda aynı sayıyla sadeleştirilir veya genişletilir, ayrı sayılarla değil.

### Bileşik kesri tam kesre dönüştürme

$\frac{11}{4}$  bileşik kesrini tam sayılı basit kesre dönüştürelim:

$$\begin{array}{r|l} 11 & 4(\text{payda}) \\ - 8 & 2(\text{tam}) \implies 2\frac{3}{4} \\ \hline & 3(\text{pay}) \end{array}$$

**Alıştırma**  $\frac{22}{5} = \dots$   $\frac{17}{3} = \dots$   $\frac{81}{13} = \dots$

### Tam kesri Bileşik kesre Dönüştürme

$$2\frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{11}{4}$$

**Alıştırma**  $3\frac{2}{3} = \dots$   $2\frac{5}{6} = \dots$   $1\frac{1}{3} = \dots$

## Rasyonel Sayılarda Dört İşlem

### Toplama-Çıkarma

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{5}{7} \quad (\text{HATA})$$

Rasyonel sayılarda toplama ve çıkarma yapılırken kesirlerin paydaları eşitlendikten sonra ortak paydada paylar toplanır ya da çıkarılır.

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12}$$

(4) (3)

**ÖRNEK:**  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = ?$

**ÇÖZÜM:**  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{13}{12}$   
(6) (4) (3)

**ÖRNEK:**  $1 + \frac{1}{2} = ?$

**1. ÇÖZÜM:** Tam sayıların paydaları 1 dir.

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

(2)

**2. ÇÖZÜM:**  $1 + \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1 + 1}{2} = \frac{3}{2}$

Toplanır  
Çarpılır

**Alıştırma**  $3 - \frac{2}{3} = \dots$   $\frac{2}{3} - 3 = \dots$   $1 + \frac{3}{5} = \dots$

**Çarpma:** Çarpma işleminde Paylar kendi aralarında paydalar kendi aralarında çarpılır, sadeleştirme yapılır.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{12}{9} = \frac{3 \cdot 12}{4 \cdot 9} = \frac{36}{36} = 1$$

**Uyarı:** Sayıları çarpmadan önce sadeleştirme yapılması sonuca daha rahat ulaşmamızı, büyük sayılarla uğraşmamamızı sağlar.

**ÖRNEK:**  $\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{14}{9}$  işleminin sonucu kaçtır?

$$\frac{\cancel{3}}{4} \cdot \frac{\cancel{6}}{7} \cdot \frac{14}{\cancel{9}} = 1$$

**Alıştırma**  $\frac{12}{5} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{20}{18}$

**Bölme:** Kesirli sayılarda bölme işlemi yapılırken 1. kesir aynen yazılır, 2 kesir ters çevrilir çarpılır.

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{6} \text{ ve ya, } \frac{2}{3} \div \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{4} = \frac{12}{12} = 1$$

**Alıştırma**  $\frac{3}{5} = \dots$   $\frac{8}{12} \div \frac{4}{3} = \dots$

**ÖRNEK:**  $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}$  İşleminin sonucu kaçtır?

**Uyarı:** Burada önemli olan merkez kesir çizgisini bulmaktır, aksi takdirde yanlış işlem yapılmış olur. Merkez kesir çizgisi = seviyesindeki çizgilerdir.

**ÇÖZÜM:**  $\frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{9}{6} - \frac{1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

**ÖRNEK:**  $\frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$  İşleminin sonucu kaçtır?

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{1}{\frac{7}{5}} = \frac{5}{7}$$

**ÖRNEK:**  $2 + \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$  İşleminin sonucu kaçtır?

**ÇÖZÜM:**  $2 + \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = 2 + \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{2}{3}}} = 2 + \frac{1}{2 - \frac{3}{2}} = 2 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 + 2 = 4$

## ONDALIKLI SAYILAR

$\frac{a}{b}$  biçimindeki rasyonel sayının payını paydasına böldüğümüzde bu sayının ondalıklı açılımını bulmuş oluruz.

$$\frac{5}{2} = 2,5 \quad \frac{10}{3} = 3,333$$

**Bir kesirli sayıyı ondalıklı hale getirmek için paydasını 10 nun kuvvetlerine genişleterek de sağlayabiliriz.**

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0,4 \quad \frac{3}{8} = \frac{375}{1000} = 0,375$$

**ÖRNEK:**  $\frac{1234}{100}$  sayısını ondalıklı hale getirelim.

**ÇÖZÜM:** Sayının pay kısmını aynen yazıyoruz.

↓  
1234,

Sayımızın sağ tarafında sanal virgölümüz varmış gibi düşünelim, işte bu virgül paydamızdaki sıfır adedi kadar sola kayacaktır

↓  
12,34

**ÖRNEK:**

$$\frac{1}{100} \Rightarrow 00001, \Rightarrow 000,01 \Rightarrow 0,01$$

**Alıştırma**  $\frac{123}{100} = \dots$   $\frac{22222}{100} = \dots$   $\frac{5}{1000} = \dots$

### Ondalıklı Sayıyı Kesirli Hale Getirme:

10,12 sayısını kesirli sayıya dönüştürelim.

Kesrimizin pay bölümüne virgülü görmeyecek şekilde sayı aynen yazılır. Paydasına da virgölün sağında ki sayı adedi kadar sıfır konur ve önüne 1 yazılır.

$$\frac{1012}{100}$$

**Alıştırma**  $0,02 = \frac{002}{100} = \frac{2}{100}$

12,345 = ..... 0,101 = ..... 0.0010 = .....

## ONDALIKLI SAYILARDA DÖRT İŞLEM

**Toplama – Çıkarma:** Toplama ve çıkarma yaparken virgölün sağındaki basamak adedi eşit olmalıdır. Eper değilse şu şekilde düzenlenebilir.

**Kural:** Bildiğiniz gibi tam sayılarda sayılar da rakamın önüne istediğiniz kadar sıfır eklerseniz bile sayının değeri değişmez.

$$12 \Rightarrow 012 \Rightarrow 00012$$

Ondalıklı sayılarda ise virgüllü sayının sağına aynı işlemi yapabiliriz.

$$1,2 \Rightarrow 1,20 \Rightarrow 1,2000$$

**ÖRNEK:**  $1 + 0,2 + 0,05$  işleminin sonucu kaçtır?

**ÇÖZÜM:** Toplama yapabilmemiz için virgölün sağında ki basamak sayısı eşit olmalıdır. En çok 2 basamaklı sayıya göre düzenleme yapılacak; (0,25)

$$\begin{array}{r} 1=1,00 \\ 0,2=0,20 \\ + 0,05=0,05 \\ \hline 1,25 \end{array}$$

**Çarpma-Bölme:** Ondalıklı sayılarda çarpma bölme yapmak için sayıyı kesirli hale getirmek gerekir.

**ÖRNEK:**  $\frac{0,04 + 0,3}{1,7} = ?$

**ÇÖZÜM:** Öncelikle pay kısmını tek ondalıklı sayıya dönüştürelim.

$$0,04 + 0,3 = 0,04 + 0,30 = 0,34 \text{ olur.}$$

$$\frac{0,34}{1,7} = \frac{\frac{34}{100}}{\frac{17}{10}} = \frac{34}{100} \cdot \frac{10}{17} = \frac{2}{10} = 0,2$$

**ÖRNEK:**  $\frac{0,15}{0,03} + \frac{2,4}{0,6} - \frac{0,004}{0,002} = ?$

**ÇÖZÜM: 1**

$$\frac{\frac{15}{100}}{\frac{3}{100}} + \frac{\frac{24}{10}}{\frac{6}{10}} - \frac{\frac{4}{1000}}{\frac{2}{1000}} \Rightarrow$$

$$\frac{15}{100} \cdot \frac{100}{3} + \frac{24}{10} \cdot \frac{10}{6} - \frac{4}{1000} \cdot \frac{1000}{2} = 5 + 4 - 2 = 7$$

**ÇÖZÜM: 2**

Eğer **pay ve paydadaki virgül sonrası rakam miktarı eşitse** virgülü yokmuş gibi görebiliriz, böylece kısa yoldan çözüme kavuşuruz.

Mesela  $\Rightarrow \frac{0,15}{0,03}$  sayısının pay ve paydasındaki

sayıların virgülden sonraki sayı adedi eşittir (2 tane) O halde virgülü yokmuş gibi görürsek sayı

$$\frac{0,15}{0,03} \Rightarrow \frac{15}{3} \Rightarrow 5 \text{ olur.}$$

Ama virgülden sonraki sayı adedi eşit değilse denkleştirme yapılır. Mesela,

$$\frac{3}{1,5} \Rightarrow \text{sayısının pay bölümünde virgülden sonra}$$

rakam yok, payda bölümünde ise bir rakam var, o nedenle pay bölümündeki sayıyı payda bölümündeki sayıya benzeteceğiz.

$$\frac{3}{1,5} = \frac{3,0}{1,5} = \frac{30}{15} = 2 \text{ olur.}$$

$$\frac{0,15}{0,03} + \frac{2,4}{0,6} - \frac{0,004}{0,002} = ?$$

$$\frac{0,15}{0,03} + \frac{2,4}{0,6} - \frac{0,004}{0,002} = \frac{15}{3} + \frac{24}{6} - \frac{4}{2} = 5 + 4 - 2 = 7$$

Bu tür sorularda 2 farklı çözüm tekniğini de kullanabilirsiniz.

**ÖRNEK:**  $\frac{123,4}{12,34} + \frac{0,1234}{1,234} = ?$

**ÇÖZÜM: 1**

$$\frac{\frac{1234}{10}}{\frac{1234}{100}} + \frac{\frac{1234}{10000}}{\frac{1234}{10000}} = \frac{1234}{10} \cdot \frac{100}{1234} + \frac{1234}{10000} \cdot \frac{10000}{1234} = 10 + \frac{1}{10} = 10 + 0,1 = 10,1$$

**ÇÖZÜM: 2**

$$\frac{123,4}{12,34} + \frac{0,1234}{1,234} = \frac{123,40}{12,34} + \frac{0,1234}{1,2340} = \frac{12340}{1234} + \frac{01234}{1234} = 10 + \frac{1}{10} = 10,1$$

## Rasyonel Sayılarda Sıralama

Birbirinden farklı rasyonel sayıların arasındaki sıralamalarda (büyüklük-küçüklük.) pay ve payda bölümlerinde ortak ilişkiler aranıp onun üzerinden karşılaştırmalar yapılır, ortaklık yoksa sayılar genişletilip ortaklık yaratılabilir.

a) Paydaları aynı olan sayılardan, payı büyük olan en büyüktür.

$$\frac{9}{11} > \frac{8}{11} > \frac{7}{11} \quad \text{veya} \quad \frac{-7}{9} > \frac{-8}{11} > \frac{-9}{11}$$

b) Payları aynı olan sayılardan paydası küçük olan sayı en büyüktür.

$$\frac{11}{7} > \frac{11}{8} > \frac{11}{9} \quad \text{veya} \quad -\frac{11}{9} > -\frac{11}{8} > -\frac{11}{7}$$

**ÖRNEK:**  $a = \frac{2}{10}$ ,  $b = \frac{22}{100}$ ,  $c = \frac{202}{1000}$  sayılarını  
büyükten küçüğe doğru sıralayınız?

**ÇÖZÜM:** Birbirinden farklı 3 kesirli sayıyı sıralayabilmek için üçünde de ortak bir özellik bulunması gerekir. Bu üç sayının ne payları ne de paydaları eşittir. Sıralama için ikisinden birinin eşitlenmesi gerekir. Biz paydaları eşitleyelim.

$$a = \frac{2}{10} \quad b = \frac{22}{100} \quad c = \frac{202}{1000}$$

(100)      (10)      (1)

$$a = \frac{200}{1000} \quad b = \frac{220}{1000} \quad c = \frac{202}{1000}$$

Genişletilmiş halde görülüşü üzere paydalar eşit olan sayılardan payı en büyük olan **b** ondan sonra **c** ve en küçüğü ise **a** kesirli sayıdır.

Buna göre sıralama **b>c>a** şeklinde olacaktır.

**ÖRNEK:**  $\frac{17}{13} + \frac{13}{17} = x$  ise  $\frac{9}{13} - \frac{30}{17}$  ifadesinin **x** cinsinden değeri nedir?

**ÇÖZÜM:** Sakın paydaları eşitlemeyin içinden çıkılmaz büyük sayılarla uğraşırız. Bu kalıptaki soruların çözüm mantığı her iki tarafı taraf tarafa toplamak ya da çıkarmaktır. Hangisi, işimize yararsa...

$$\frac{17}{13} + \frac{13}{17} = x \quad \Rightarrow \quad \frac{26}{13} - \frac{17}{17} = x+y$$

+  $\frac{9}{13} - \frac{30}{17} = y$  diyelim      2-1=x+y

$$1=x+y \quad (y \text{ tek başına bırakılır})$$

$$1-x=y \quad (y = \frac{9}{13} - \frac{30}{17})$$

## UYGULAMA SORULARI

1)  $2\frac{2}{3} - 3\frac{1}{6} + \frac{2}{9}$  işleminin sonucu kaçtır?

2)  $\frac{3}{2} + \frac{5}{6} - \frac{7}{24}$  işleminin sonucu kaçtır?

3)  $\frac{1}{1 + \frac{2}{3 - \frac{1}{2}}}$  işleminin sonucu kaçtır?

4)  $\frac{2}{\frac{3}{4} + \frac{3}{4}}$  işleminin sonucu kaçtır?

5)  $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{6}}}$  işleminin sonucu kaçtır?

6)  $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} : \frac{6}{8}$  işleminin sonucu kaçtır?

7)  $\left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{1}{4} \right] : \frac{1}{24}$  işleminin sonucu kaçtır?

8)  $\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{6}\right) - \left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)$  işleminin sonucu kaçtır?

9)  $3 : \frac{2}{5} - 2 \cdot \frac{1}{3}$  işleminin sonucu kaçtır?

10)  $1 - \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2} \div \frac{4}{5} - \frac{2}{3}\right)\right]$  işleminin sonucu kaçtır?

11)  $\frac{2,4}{0,12} - \frac{0,25}{0,5}$  işleminin sonucu kaçtır?

12)  $\frac{0,2}{\frac{0,02}{0,2} - \frac{0,2}{0,02} + \frac{0,02}{0,002}}$  işleminin sonucu kaçtır?

13)  $\frac{1}{0,006} \cdot (0,06 + 0,66)$  işleminin sonucu kaçtır?

14)  $a = -\frac{2}{9}$ ,  $b = -\frac{3}{11}$ ,  $c = -\frac{4}{13}$  sayıları verilmiştir. Buna göre **a,b,c** arasındaki büyüklük sıralaması nasıldır?

15)  $x = \frac{7}{8}$ ,  $y = \frac{8}{9}$ ,  $z = \frac{9}{10}$  sayıları verilmiştir. Buna göre **x,y,z** arasındaki büyüklük sıralaması nasıldır?

16)  $\frac{45}{29} + \frac{27}{61} = a$  ise  $\frac{13}{29} + \frac{34}{61}$  ifadesinin **a** cinsinden değeri nedir?

17)  $\left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{x-y}\right) = 5$   
 $x - y = 21$  ise  $y = ?$

#### CEVAPLAR

- 1)  $-\frac{5}{18}$       2)  $\frac{49}{24}$       3)  $\frac{5}{9}$       4)  $\frac{17}{6}$   
5) 6      6)  $\frac{5}{3}$       7) 1      8)  $\frac{1}{2}$   
9)  $\frac{41}{6}$       10)  $-\frac{17}{24}$       11) 19,5      12) 2  
13) 120      14)  $a > b > c$       15)  $c > b > a$       16)  $3 - a$   
17) -17

# DENKLEM ÇÖZME

## Denklem Kavramları

Temel matematiğin en önemli bölümü kuşkusuz ki denklemler konusudur. Zaten matematiğin temel açılımı bilinmeyen fonksiyonları belirli kurallara içerisinde düzenleyerek sınıflandırma, buradan hareketle bilinmeyi bulma disiplini. Yani bilinmeyi denklem haline getirip sonuca ulaşmak.

Denklem konusu bilinmeden hiç bir matematiksel sorunun üstesinden gelemeyiz, o yüzden denklem çözümlerinin bilmemek matematikte hiçbir şey yapamamak demektir. Matematiğin alfabesi denklem çözümleridir, bu konu matematiğin en önemli alt yapısıdır, buna göre çalışılmalı ve konuya önem verilmelidir.

### Bilenen ve Bilinmeyen Kavramları

En çok karmaşanın yaşandığı yer bu kavramlardır.

Bilinen Kavramlar: 1, -6,  $\frac{2}{3}$ , 100...(reel sayılar)

Bilinmeyen Kavramlar:  $x, y, z, t, 2a, 3x, \frac{2y}{3}, -4abc, a^2$

gibi kavramlardır. Bilinmeyen sayıların önünde bilinen sayının bulunması onun bilinmeyenlik özelliğini kaybettirmez.

Şimdi aşağıda bir denklem örneğini ele alalım.

$$x + 5 = 8$$

Görüldüğü gibi herhangi bir x sayısının 5 ile toplamının sonucunun 8 ettiği ifade edilmiş.

**Kural:** En çok yapılan hatalardan biriyle başlayalım.

$$\begin{aligned} 3x+2 &= 11 \\ \Downarrow \\ 3x &= 11 \text{ (HATA)} \end{aligned}$$

3x kavramı bilinmeyen, 2 sayısı bilinen bir kavramdır. **Denklemlerde bilinenele bilinmeyen asla toplanıp çıkartılamaz. Ama çarpma ve bölme işlemi yapılabilir.**

## Denklem Çözme

Denklem çözümlerinde ki **amaç bilinmeyi tek başına bırakmaktır.** Bilinmeyen yanında, altında ve ya üstündeki kavramlar eşitliğinin diğer tarafına atılır. Eşitliğin diğer tarafına geçen kavram nitelik değiştirir yani ters gider.

**ÖRNEK:**  $3x - 6 = 12$  ise x hangi değeri alır?

**ÇÖZÜM:** Amacımız bilinmeyi (x) tek başına bırakmaktır. x yanındaki 3 ve 6 sayılarını eşitliğin sağ tarafına atacağız. Karşı tarafa geçen nitelik değiştirir, ters gider.

Tabii öncelik sıralaması önemlidir. İlk öncelik toplama ve çıkarma işlemindedir.

$$\begin{aligned} &\curvearrowright \\ 3x - 6 &= 12 \end{aligned}$$

-6 karşı tarafa ters geçer, görüldüğü gibi çıkarma işleminin tersi toplama olacaktır.

$$\begin{aligned} 3x &= 12 + 6 \\ \Downarrow \\ 3x &= 18 \end{aligned}$$

Şimdi de 3 sayısını öbür tarafa atacağız. x ile 3 arasında hangi işaret vardır? Çarpma işlemi. O zaman çarpı 3 karşıya bölü 3 diye geçecektir.

$$\begin{aligned} &\curvearrowright \\ 3x &= 18 \\ x &= \frac{18}{3} \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Yani bilinmeyen sayımız 6 olacaktır.

**ÖRNEK:** :  $2(a + 4) = 10$  ise a hangi değeri alır?

**ÇÖZÜM:** İşleme başlayabilmemiz için parantezi dağıtmak zorundayız.

$$\begin{aligned} &\curvearrowright \\ 2(a + 4) &= 10 \\ 2a + 8 &= 10 \\ 2a &= 10 - 8 \\ 2a &= 2 \\ a &= \frac{2}{2} \\ a &= 1 \end{aligned}$$

**ÖRNEK:**  $3y + 9 = 4y - 5$  ifadesinde y hangi değeri alır?

**ÇÖZÜM:** Eşitliğin her iki tarafında da bilinmeyen var ise temel **kural bilinenele bir tarafa bilinmeyenler bir tarafa alınarak işlem yapılacaktır.** Kolaylık sağlama açısından küçük olan bilinmeyen büyük olanın tarafına geçmelidir.

$$\begin{aligned} &\curvearrowright \quad \curvearrowright \\ 3y + 9 &= 4y - 5 \\ + 9 + 5 &= 4y - 3y \\ 14 &= 1y \\ 14 &= y \end{aligned}$$

**ÖRNEK:**  $-2t - 3(t - 4) = t - 3(t + 2)$  Denklemde t hangi değeri alır?

**ÇÖZÜM:** Karmaşık gibi görünse de basit bir denklem modeli. Öncelikle engellerden kurtulalım. Parantez işlemlerini dağıtalım.

$$\begin{aligned} &\curvearrowright \quad \curvearrowright \\ -2t - 3(t - 4) &= t - 3(t + 2) \end{aligned}$$

$$-2t - 3t + 12 = t - 3t - 6$$

Eşitliğin her iki tarafında da ikişer tane bilinmeyen varsa önce kendi aralarında toplanırlar.

$$\begin{aligned} (-2t - 3t) + 12 &= (t - 3t) - 6 \\ -5t + 12 &= -2t - 6 \end{aligned}$$



Şimdi bilinmeyen küçük olanını büyük olanının yanına bilineninde diğerini ters tarafa alalım.

$$-5t + 12 = -2t - 6$$

$$\begin{aligned} +12 + 6 &= -2t + 5t \\ 18 &= 3t \\ \frac{18}{3} &= t \\ 6 &= t \end{aligned}$$

## Rasyonel Sayılarda Denklemler

$\frac{a}{b}x + \frac{c}{d}y \dots = \frac{k}{l}z$  şeklinde ifade edilen

denklemlere rasyonel ( kesirli ) sayılı denklem denir. Birçok çözüm tekniği uygulanabilir ama en temel ve genel çözümü paydaları eşitleme yöntemidir. Bütün kesirlerin paydası eşitlendikten sonra paydaları artık görmezden gelebiliriz.

**ÖRNEK:**  $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 5$  ise  $x$  kaçtır?

**ÇÖZÜM:** Bütün sayıları (tamsayılarda dahil) paydalarını eşitleyelim.

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = \frac{5}{1} = \frac{2x}{6} + \frac{3x}{6} = \frac{30}{6}$$

(2) (3) (6)

**Paydalar eşit olduğu için artık onları yok edebiliriz.**

$$\begin{aligned} 2x + 3x &= 30 \\ 5x &= 30 \\ x &= \frac{30}{5} \\ x &= 6 \end{aligned}$$

**ÖRNEK:**  $y - \frac{2}{3} = \frac{3}{2}(y - 2)$  ise  $y$  kaçtır?

**ÇÖZÜM:** Paydaları eşitleyelim.

$$\frac{y}{1} - \frac{2}{3} = \frac{3(y-2)}{2} \Leftrightarrow \frac{6y}{6} - \frac{4}{6} = \frac{9(y-2)}{6}$$

(6) (2) (3)

Paydaları yok edebiliriz.

$$6y - 4 = 9(y-2)$$

$$\begin{aligned} 6y - 4 &= 9y - 18 \\ 6y - 9y &= -18 + 4 \\ -3y &= -14 \end{aligned}$$

$$y = \frac{-14}{-3} = \frac{14}{3}$$

## İki Bilinmeyenli Denklemler

İçerisinde iki tane farklı tür bilinmeyen bulunmayan denklemlere denir.

Bu tür denklemleri çözerken yok etme metodunu kullanacağız.

**ÖRNEK:**  $2x + y = 11$   
 $3x + 2y = 15$

Denklemleri verildiğine göre (x,y) ikilisinin çözüm kümesi nasıldır?

**ÇÖZÜM:** Yok etme metodunda esas amaç bilinmeyenlerden birini (x veya y) yok ederek diğerini bulmaktır. 2 önemli kuralı vardır.

**Yok edilecek bilinmeyen (x olsun) kat sayıları eşit ve işaretleri ters olmalıdır.**

$$\begin{aligned} (2x) + y &= 11 \\ (3x) + 2y &= 15 \end{aligned}$$

Her iki denklemde de x in katsayıları farklı. O yüzden eşitlemek zorundayız, bunun için genişletme işlemini kullanacağız.

$$\begin{aligned} 3/2x + y &= 11 \\ 2/3x + 2y &= 15 \end{aligned}$$

Genişletme işleminde bütün denklem genişler.

$$\begin{aligned} 6x + 3y &= 33 \\ 6x + 4y &= 30 \end{aligned}$$

Katsayılar eşitlendi. Şimdi de x in işaretlerini ters hale getirelim. Bunun için 1 denklemi -1 ile çarpabiliriz. Yeni denklemlerimiz şöyledir.

$$\begin{aligned} -6x - 3y &= -33 \\ 6x + 4y &= 30 \end{aligned}$$

Denklem istediğimiz hale geldi, x in katsayıları eşit ve işaretleri ters hale geldi. Şimdi işlemi taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{aligned} -6x - 3y &= -33 \\ + 6x + 4y &= 30 \\ \hline 0 + 1y &= -3 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

Bilinmeyenlerden birini bulduk.  $y = -3$

Şimdi x nasıl bulunur, ona geçelim.

Yukarıda ki herhangi bir denklemden birini alalım.

$$2x + y = 11$$

Artık bu denklemde y nin değeri bilindiğine göre sadece x i bulabiliriz.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 \\ \downarrow \\ 2x + (-3) &= 11 \\ 2x - 3 &= 11 \\ 2x &= 11 + 3 \\ 2x &= 14 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Buna göre x, y ikilisinin oluşturduğu çözüm kümesi

$$\text{Ç.K.} = \{x; y\} = \{7; -3\}$$

**Not:** Ayrı ayrı iki işlem yapmaktansa tek işlemde birinci denklemi - 3 ile de çarpabiliriz.

**ÖRNEK:**  $a + 4b + 7 = 0$   
 $2b - 5a + 31 = 0$

Denklemler sisteminin çözüm kümesi nedir?

**ÇÖZÜM:** Öncelikle bu karışık denklem sistemini düzenli hale getirelim, birçok matematik sorusu için bu teknik önemlidir, soruların direkt çözümüne geçmeden önce düzenlemeye gidilirse yabancıymış gibi gelen soru tanıdık hal alır.

$$\begin{array}{r} a + 4b + 7 = 0 \\ 2b - 5a + 31 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} a + 4b = -7 \\ -5a + 2b = -31 \end{array}$$

Şimdi yok etme metodumuzu kullanabiliriz. Kolaylık sağlaması açısından ters işaretli bilinmeyen yok edilmelidir. Yani  $a$ .

$$\begin{array}{r} 5/a + 4b = -7 \\ -5a + 2b = -31 \\ \hline 5a + 20b = -35 \\ + -5a + 2b = -31 \\ \hline 22b = 66 \\ b = 3 \end{array}$$

ilk denklemde  $b$  yerine değerini koyarsak  $a$  yi buluruz. 12

$$a + 4b = -7 \Rightarrow a + 4(3) = -7 \Rightarrow a + 12 = -7 \Rightarrow a = -19$$

$$a = -5$$

$$\text{Ç.K.} = \{-5, 3\}$$

### Üç Bilinmeyenli Denklemler

Üç bilinmeyenli denklemlerde çözüme ulaşmak için 3 ayrı denkleme ihtiyaç duyulur. Genelde bu soru tiplerinde çözüm kümesi istenmez, daha çok yeni bir denklemin sonucu istenir.

**ÖRNEK:**  $a + b = 5$   
 $b + c = 7$   
 $a + c = 8$

ifadeleri verildiğine göre  $a+b+c$  işleminin sonucu kaçtır?

**ÇÖZÜM:** Tek tek bilinmeyenleri bulabiliriz ama bu uzun zamanımızı alır. Zaten sınavlarda da öğrencinin zamanını çalmak için sorulan soru tipidir. Öncelikle denklemi taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{array}{r} a + b = 5 \\ b + c = 7 \\ + a + c = 8 \\ \hline 2a + 2b + 2c = 20 \end{array}$$

Bizden istenen  $a+b+c$  işleminin sonucu, o zaman her iki tarafı da 2 ye bölersek,

$$\frac{2a + 2b + 2c}{2} = \frac{20}{2}$$

$$a + b + c = 10$$

**ÖRNEK:**  $1 + \frac{12}{1 + \frac{15}{1 + \frac{8}{x}}} = 4$  olduğuna göre  $x = ?$

**ÇÖZÜM:** Bu soru tipleri çözüm yöntemi bilinmediğinde sıkıntı yaratacak soru tipleridir. Burada tümdengelim metodunu kullanacağız.

$$1 + \frac{12}{1 + \frac{15}{1 + \frac{8}{x}}} = 4$$

1 ile hangi sayıyı toplarsak 4 eder. Cevap = 3

$$\frac{12}{1 + \frac{15}{1 + \frac{8}{x}}} = 3$$

12 yi hangi sayıya bölersek 3 eder. Cevap = 4

$$1 + \frac{15}{1 + \frac{8}{x}} = 4$$

1 ile hangi sayıyı toplarsak 4 eder. Cevap = 3

$$\frac{15}{1 + \frac{8}{x}} = 3$$

15 i hangi sayıya bölersek 3 yapar Cevap = 5

$$1 + \frac{8}{x} = 5$$

1 ile hangi sayıyı toplarsak 5 eder. Cevap = 4

$$\frac{8}{x} = 4$$

8 i hangi sayıya bölersek 4 eder. Cevap = 2

$$x = 2$$

## UYGULAMA SORULARI

1.  $\frac{k}{2} + 3 = 6$  ise **k** sayısı kaçtır?

2.  $3(m+2) - 5 = m + 2(m-5)$  işleminde **m** hangi sayıdır?

3.  $\frac{a}{4} - \frac{2a}{3} = \frac{-a-3}{6}$  denklemindeki **a** sayısının değeri kaçtır.

4.  $\frac{b}{2} - \frac{3-b}{3} = 4$  ise **b** kaçtır?

5.  $\frac{z+3}{z} - \frac{4}{5} = \frac{z-1}{z}$  **z=?**

6.  $\frac{x+3}{3} - \frac{x-2}{2} = \frac{2}{5}$  işleminde **x** hangi değeri alır?

7.  $k + m = 3$   
 $3k - 4m = 2$   
Denklemleri verildiğine göre **k - m** değeri kaçtır?

8.  $\frac{2}{a} - \frac{6}{b} = -\frac{1}{2}$

$$\frac{3}{a} - \frac{2}{b} = 1$$

Denklemler sisteminde  $(a,b)$  ikilisinin çözüm kümesi nedir?

9.  $k - 2p = 12$   
 $p - 2m = 10$   
 $m + n = 8$

ise  $k-3p+3m+n$  ifadesinin değeri kaçtır?

10.  $3 + \frac{10}{1 + \frac{3}{1 + \frac{10}{x}}} = 8$  ise **x** kaçtır?

11.  $1 + \frac{1 + \frac{y}{2}}{3} = 2$  işleminde **y** hangi değeri alır?

12)  $x \cdot y = 8$   
 $y \cdot z = 4$   
 $x \cdot z = 2$

Olduğuna göre  $(x+y) \cdot z$  işleminin sonucu kaçtır?

13.  $a + \frac{1}{b} = 4$   
 $b + \frac{1}{a} = 6$

Verildiğine göre  $\frac{a}{b}$  oranı kaçtır?

### CEVAPLAR

- 1) 6      2)  $\emptyset$       3) 2      4) 6  
5) 5      6)  $\frac{48}{5}$       7) 1      8)  $\{2;4\}$   
9) 10      10) 5      11) 10      12) 8  
13)  $\frac{2}{3}$

# BÖLME, BÖLÜNEBİLME ve OBEB-OKEK

## BÖLME

A, B, C, K birer doğal sayı ve  $B \neq 0$  olmak üzere,

$$\begin{array}{r} A \mid B \\ - \quad C \\ \hline K \end{array}$$

bölme işleminde,

• A ya bölünen, B ye bölen, C ye bölüm, K ya kalan denir.

•  $A = B \cdot C + K$  dir.

• **Kalan, bölenden küçüktür. ( $K < B$ )**

• Kalan, bölümden (C den) küçük ise, bölen (B) ile bölümün (C) yeri değiştirilebilir. Bu durumda K ile A değişmez.

•  $K = 0$  ise, A sayısı B ile tam bölünebiliyor denir.

**ÖRNEK:** 12312312 sayısı 123 sayısına bölündüğünde sonuç kaç olur?

**ÇÖZÜM:**

$$\begin{array}{r} 12 \ 12 \ 12 \ 3 \mid 12 \\ - 12 \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ \hline 0 \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ - 12 \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ \hline 0 \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ - 12 \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ \hline 0 \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \end{array}$$

Dashed arrows indicate the process of dividing 12 into 12, 12, 12, and 3, resulting in a quotient of 101010.

**ÖRNEK:**

$$\begin{array}{r} A \mid 18 \\ - \quad n \\ \hline n^2 \end{array}$$

Yukarıdaki bölme işlemine göre A sayısının alabileceği **en büyük değer** kaçtır?

**ÇÖZÜM:**  $A = 18 \cdot n + n^2$

A sayısının **en büyük değeri** alabilmesi için n sayısına en büyük değeri vermeliyiz.

Ancak unutulmaması gereken özellik, kalanın bölenden küçük olma koşuludur.

$n^2 < 18 \Rightarrow$  18 den küçük olan en büyük tam kare sayı **16** dir.

$n^2 = 16$  ise  $n = 4$  olur.

$A = 18 \cdot n + n^2 \Rightarrow A = 18 \cdot 4 + 4^2 = 72 + 16 = 88$

## Bölünebilme Kuralları

### 2 ile Bölünebilme

Birler basamağındaki rakamı çift olan sayılar 2 ile tam bölünür.

Tek sayıların 2 ile bölümünden kalan 1 dir.

### 3 ile Bölünebilme

Rakamlarının sayısal değerleri toplamı 3 ün katı olan sayılar 3 ile tam bölünür.

Bir sayının 3 ile bölümünden kalan, rakamlarının toplamının 3 ile bölümünden kalana eşittir.

**ÖRNEK:** 23A üç basamaklı sayısı 3 e tam bölünebildiğine göre A sayısı hangi değerleri alır?

**ÇÖZÜM:**  $2 + 3 + A \Rightarrow 5 + A$

$5 + A = 6$  veya  $5 + A = 9$  veya  $5 + A = 12$  olmalıdır.

$A = 1$

$A = 4$

$A = 7$

**ÖRNEK:** Rakamları birbirinden ve sıfırdan farklı, üç basamaklı ve üçe bölümünden kalan 2 olan **en küçük doğal sayı** kaçtır?

**ÇÖZÜM:** Bu tür sorularda kalan yokmuş gibi işlem düzenlenir, ardından kalan eklenir.

Önce yukarıdaki koşullara uygun 3 e tam bölünebilen sayıyı bulalım.

Rakamları birbirinden ve sıfırdan farklı, üç basamaklı en küçük doğal sayı **123** tür. Bu sayı ayrıca **3 e** tam bölünebilmektedir. **Kalanın 2 olması** için sayıya 2 eklersek sonuca ulaşabiliriz.

$123 + 2 = 125$  bulunur.

## 4 İle Bölünebilme

Bir sayının onlar basamağındaki rakam ile birler basamağındaki rakamın (son iki basamak) belirttiği sayı, 4 ün katı olan sayılar 4 ile tam bölünür.

... abc sayısının 4 ile bölümünden kalan bc nin (son iki basamak) 4 ile bölümünden kalana eşittir.

## 5 İle Bölünebilme

Birler basamağındaki rakam 0 veya 5 olan sayılar 5 ile tam bölünür.

Bir sayının 5 ile bölümünden kalan, o sayının birler basamağındaki rakamın 5 ile bölümünden kalana eşittir.

**ÖRNEK:** **23X** üç basamaklı sayısının 5 ile bölümünden kalan 3 ise **X** hangi değerleri alır?

**ÇÖZÜM:** Bir sayının 5 ile bölümünden kalan, o sayının birler basamağındaki rakamın 5 ile bölümünden kalana eşittir.

**23X** sayısının birler basamağındaki sayının 5 ile bölümünden kalan 3 ise **X** sayısı alacağı değerler, **3 ve 8** olacaktır.

## 8 İle Bölünebilme

Yüzler basamağındaki, onlar basamağındaki ve birler basamağındaki rakamların (son üç rakamın) belirttiği sayı 8 in katı olan sayılar 8 ile tam bölünür.

3000, 3432, 65104 sayıları 8 ile tam bölünür.

## 9 İle Bölünebilme

Rakamlarının toplamı 9 un katı olan sayılar 9 ile tam bölünür.

Bir sayının 9 ile bölümünden kalan, o sayının rakamlarının toplamının 9 ile bölümünden kalana eşittir.

**ÖRNEK:** **123456** sayısının **9** ile bölümünden kalan kaçtır?

**ÇÖZÜM:**  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$   
 $21$   
 $2 + 1$   
**3** bulunur.

## 10 İle Bölünebilme

Birler basamağındaki rakamı 0 (sıfır) olan sayılar 10 ile tam bölünebilir. Bir sayının birler basamağındaki rakam o sayının 10 ile bölümünden kalandır.

**ÖRNEK:** **9510542** yedi basamaklı sayısının;

- a) 3 ile bölümünden **kalan** kaçtır?
- b) 4 ile bölümünden **kalan** kaçtır?
- c) 5 ile bölümünden **kalan** kaçtır?
- d) 8 ile bölümünden **kalan** kaçtır?
- e) 9 ile bölümünden **kalan** kaçtır?
- f) 10 ile bölümünden **kalan** kaçtır?

**ÇÖZÜM:**

a)  $9 + 5 + 1 + 0 + 5 + 4 + 2 = 26$  .  
26/3 kalan 2 olur.

b)  $42/4$  kalan 2 olur.

c) Birler basamağındaki sayı 2 olduğu için kalan 2 dir.

d)  $542/8$  işleminde kalan 6 olur.

e)  $9 + 5 + 1 + 0 + 5 + 4 + 2 = 26$   $2 + 6 = 8$   
bulunur. **f)**

Birler basamağındaki sayı 2 olduğu için kalan 2 dir.

## Büyük Sayılarda Bölünebilme

Her sayının tek tek bölünebilme kurallarını bilemeyiz, bu sorunu çözebilmek adına şöyle bir formülizasyon bulunmuştur.

**Kural:** İstenilen sayının aralarında asal çarpanlarını bularak çözüm sağlanır.

### Aralarında Asal Sayılar

*Normalde asal olmayıp, kendi aralarında ortak bölüneni olmayan sayılara denir.*

*8 ile 15 asal olmayan iki sayıdır ama bu sayılar aralarında asal sayılardır çünkü ikisinin de 1 den başka ortak bölüneni yoktur.*

15 sayısının bölünebilme kuralını bulalım.

15 sayısının aralarında asal çarpanları => 3 ve 5 tir. Yani bir sayının 15 e bölünebilmesi için hem 3 e hem de 5 e tam olarak bölünmesi gerekmektedir.

**ÖRNEK:** Üç basamaklı **4AB** sayısı 15 e tam bölünebildiğine göre **A** hangi değerleri alır?

**ÇÖZÜM:**

**4AB** sayısı hem 3 hem de 5 e tam bölünmelidir. Bu tür durumlarda öncelik birler basmağına ilgilendiren kuraldadır. O nedenle ilk 5 ile ya da 2 ile bölünebilme kurallarını sormamız gerekmektedir.

Sayının 5 ile tam bölünebilmesi için birler basamağı 0 ya da 5 olmalıdır.

**4A0** veya **4A5**

Şimdi de 3 ile bölünebilme kuralını bulalım. Sayıların rakamlarının değerinin toplamı 3 veya 3 ün katı olmalıdır.

	$4 + A = 6$	<b>A=2</b>
<b>4A0</b> →	$4 + A = 9$	<b>A=5</b>
	$4 + A = 12$	<b>A= 8</b>
	$4 + A + 5 = 9$	<b>A=0</b>
	$4 + 5 + A = 12$	<b>A=3</b>
<b>4A5</b> →	$4 + 5 + A = 15$	<b>A=6</b>
	$4 + 5 + A = 18$	<b>A=9</b>

A sayısı yukarıda ki değerleri alır.

**ÖRNEK:** **AAB** üç basamaklı sayısının 45 ile bölümünden kalan 2 ise A'nın **alabileceği en büyük değer kaçtır?**

**ÇÖZÜM:** 45 sayısının aralarında asal çarpanları 9 ve 5 dir. Yani AAB sayısı hem 5 e hem de 9 a tam bölünmelidir ardından 2 kalan eklenecektir.

Önce AAB sayısı 5 e tam bölünebilmesi için B 'nin alacağı değerler, **0 ve 5** dir.

Yani sayılarımız **AA0** ve **AA5** dir.

Şimdi de bu sayıların 9 a tam bölünmesinin koşullarını arayalım.

$$\begin{aligned}A + A + 0 &= 9 \\A + A + 0 &= 18 \\A + A + 0 &= 27\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= 4, 5 \text{ (rakam değil)} \\A &= 9 \\A &= 13,5 \text{ (rakam değil)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A + A + 5 &= 9 \\A + A + 5 &= 18 \\A + A + 5 &= 27\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= 2 \\A &= 4, 5 \text{ (rakam değil)} \\A &= 11 \text{ (rakam değil)}\end{aligned}$$

O halde sayımızın alabileceği değerler **990** ve **225** dir. Bu sayıya 2 eklediğimizde istediğimiz sayılara ulaşmış oluruz.

**992 ve 227**

Buna göre A nın alabileceği en büyük değer **9** olacaktır.

**ÖRNEK:** 10 ile 60 arasında 10 ile bölünebilen kaç tam sayı vardır?

**ÇÖZÜM:** 10 ile 60 arasındaki sayılar sorulduğu için 10 ve 60 dahil değildir. 10 ile 60 arasında olup da 10 a bölünebilen sayıları rahatça bulabiliriz. Bunlar 20, 30, 40 ve 50 dir. Yani cevap 4 tane sayıdır.

Bu kadar basit aralıklar sorulmayacağı için bu kalıpların basit bir formülü vardır.

$$10, 20, \dots, 40, 50, 60$$

İlk uçtaki ilk katsayı (20) ile, son uçtaki son katsayının(50) farkının alıp, istenilen sayıya 1 eklediğimizde sonuca ulaşılır.

$$10, 20, \dots, 40, 50, 60$$

$$\text{Formül: } \frac{\text{Son.Katsayı} - \text{İlk.Katsayı}}{\text{Bölen}} + 1$$

$$X = \frac{50 - 20}{10} + 1 = 4$$

**ÖRNEK:** 25 ile 286 arasında **5** e bölünebilen kaç tane tamsayı vardır?

**ÇÖZÜM:** **25** den sonra gelen 5 in katıyla, **286** dan önce gelen 5 in katını bulalım.

$$25, 30, 35, \dots, 280, 285, 286$$

$$X = \frac{285 - 30}{5} + 1 = 52$$

## Asal Bölenler

Bir sayının birden çok böleni vardır. Bu bölenlerin içerisinde asal olanlar ve asal olmayan tam bölenler bulunur. Asal bölenler 2,3,5,7 gibi sayılardır.

Şimdi bir sayıyı asal bölenlerine ayırmayı bulacağız.

72 sayısını asal bölenlerine ayıralım.

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 72 = 2^3 \cdot 3^2$$

12 sayısının kaç tane pozitif böleni vardır?

Bu sayıyı bölen tam sayılar 1, 2, 3, 4, 6, 12 dir. Yani 6 tane pozitif (doğal sayı) böleni vardır. Bir o kadarında negatif sayı böleni vardır. İçlerinde 2 ve 3 asal bölenleridir.

Tabii her sayının pozitif bölenlerinin sayısını bu kadar rahat bulamayız, işimiz büyük sayılarda zorlaşır. Bunun için basit bir formül bulunmaktadır.

**Formül:**A sayısının pozitif bölenlerinin sayısı (PBS);

$$A = a^x b^y c^z \dots$$

**PBS = (x+1).(y+1).(z+1)....** şeklinde bulunur.

$$12 = 2^2 \cdot 3^1 \Rightarrow \text{PBS} = (2+1).(1+1) = 3 \cdot 2 = 6 \text{ bulunur.}$$

**ÖRNEK:** 72 sayısının;

- Kaç tane pozitif tam sayı böleni vardır?
- Kaç tane tam sayı böleni vardır?
- Kaç tane asal olmayan tamsayı böleni vardır?

**ÇÖZÜM:** 72 sayısının asal çarpanlarına ayrılmış halini yukarıda bulmuştuk.

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

- PBS= (3+1)(2+1)=4.3=12 tane pozitif böleni vardır.
- 12 tane pozitif böleni varsa 12 tane de negatif böleni vardır. Toplamda 24 tane tam sayı böleni vardır.
- Asal olan bölenleri 2 ve 3 tür. Bu nedenle asal olmayan bölenlerin sayısı;  
 $24 - 2 = 22$  tanedir

**ÖRNEK:**  $x, y \in \mathbb{N}$   $x = \frac{180}{y}$  olduğuna göre y

kaç tane değer alır?

**ÇÖZÜM:** x ve y doğal sayıymış yani pozitif sayılamış. Soru bizden 180 ni kaç tane tam sayı ile bölersek sonuç tamsayı olur demektedir. Yani 180 nin kaç tane pozitif böleni vardır?

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$

$$\text{PBS} = (2+1)(2+1)(1+1) = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$$

**y doğal sayısı 18 tane doğal sayı değeri alır.**

**ÖRNEK:**  $90 \cdot x = y^3$  ifadesi verilmiştir.

Buna göre  $x + y$  toplamının alabileceği en az değer kaçtır?

**ÇÖZÜM:** Bu kalıp soruların sözel ifadesi 90 sayısını en az hangi sayıyla çarparsak bir sayının küpüne ulaşıyoruz. Bunun için 90 sayısını asal çarpanlarına ayırıp eksik kalan yanını tamamlayacağız.

$$90 \cdot x = y^3$$

$2^1 3^2 5^1 x = y^3 \Rightarrow x$  sayısını bulmak için bütün sayıları üçüncü kuvvetlerine tamamlamalıyız.

$$2^1 3^2 5^1 x = y^3$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \downarrow \downarrow \\ 2^2 3^3 5^2 \end{array} \text{ (kuvvetlerin toplamı 3 olacak)}$$

$$4 \cdot 3 \cdot 25 = 300$$

**x sayısının alabileceği en küçük değer 300 dür.**

Şimdi y sayısını bulalım.

Sayımızın tamamlanmış hali;

$$2^3 3^3 5^3 = y^3 \Rightarrow 30^3 = y^3 \Rightarrow y = 30$$

Buna göre;

$$x + y = 300 + 30 = 330$$

## OBEB-OKEK

Birden fazla sayının ortak bölenleri ve katları arasında ki ilişkiyi irdeleyeceğiz.

12 ve 16 sayısının ayrı ayrı katlarını ve de bölenlerini bulalım.

96	128
84	112
72	96
60	80
48	64
36	48
24	32
12	16
6	8
4	4
3	2
2	1
1	1

**OBEB:** Açıklı her iki sayısında Ortak Bölenlerin En Büyüğüdür. Her iki sayısında ortak bölenleri gösterildiği gibi **4, 2, 1** dir. En büyüğü 4 tür. Buna göre;

$$\text{OBEB}(12, 16) = 4$$

**OKEK:** Her iki sayının Ortak Katlarının En Küçüğünü ifade eder. Her iki sayısında ortak katları 48, 96, ..... sonsuza kadar devam eder. Ortak Katlarının En Küçüğü ise 48 dir. Buna göre;

$$\text{OKEK}(12, 16) = 48$$

Tabi ki her sayının OBEB ve OKEK ini bu uzun yolla bulamayız, daha pratik bir yöntem aşağıdaki gibidir.

Her iki sayının aynı anda asal çarpanlarına böleriz. Bu durumlarda istisnalar dışında ilk yapacağımız işlem OBEB i bulmak olacaktır. Ardından OKEK e devam edilir.

12 , 16	2	Her iki sayıda aynı anda bölünene
6 , 8	2	kadar işleme devam edilir. Ortak
3 , 4		bölen kalmamışsa işlem biter.

$$\text{OBEB}(12,16)=2 \times 2=4$$

12 , 16	2	OBEB işlemi bittikten sonra artık
6 , 8	2	sayıları tek tek bölenlerine ayıracağız.
3 , 4	3	
1 , 4	2	
1 , 2	2	
1 , 1		

$$\text{OKEK}(12,16)=2 \times 2 \times 2 \times 3=48$$

**Kural:** İki sayının çarpımı, o sayıların OBEB ve OKEK inin çarpımına eşittir.

$$A \times B = \text{OBEB}(A,B) \times \text{OKEK}(A,B)$$

$$12 \times 16 = 48 \times 4$$

$$192 = 192$$

**ÖRNEK:** 54 ve A sayısının OBEB i 6, OKEK i 216 ise A sayısı kaçtır?

**ÇÖZÜM:**  $A \times B = \text{OBEB}(A,B) \times \text{OKEK}(A,B)$

$$54 \times A = 6 \times 216$$

$$A=24$$

**ÖRNEK:** 6, 9, 12 sayılarının OBEB ve OKEK ini bulunuz?

**ÇÖZÜM:**

6 , 9 , 12	3	} OBEB	} OKEK
2 , 3 , 4	2		
1 , 3 , 2	2		
1 , 3 , 1	3		
1 , 1 , 1			

$$\text{OBEB}(6,9,12) = 3$$

$$\text{OKEK}(6,9,12) = 3^2 \cdot 2^2 = 9 \times 4 = 36$$

**ÖRNEK:** Faruk elindeki bilyeleri ayrı ayrı üçerli, dörderli ve beşerli saydığına hep iki bilye artmaktadır. Buna göre Faruk'un elinde **en az kaç bilye** vardır?

**ÇÖZÜM:** Devamlı 2 bilye fazla geldiğine göre o bilyeler olmasaydı bilyeler hem üçerli, hem dörderli ve hem de beşerli sayıldığına artık bilye olmayacaktı. Yani bilyelerin sayısı 3, 4 ve 5 in **ortak katı** olacaktı. Bu sayıyı da 3, 4, 5 in OKEK i alınarak bulabiliriz.

OKEK(3, 4, 5) = 60 bulunur.  
Her seferinde 2 bilye arttığına göre bu sayıya 2 ekleyerek sonuca ulaşırız.

$$60 + 2 = 62 \text{ tane bilyesi vardır.}$$

Bu sorunun sayısal olarak ifadesi şöyledir.

$$A = 3a + 2 = 4b + 2 = 5c + 2$$

**ÖRNEK:** 12 ile bölümünden kalan 6, 16 ile bölümünden kalan 10 olan **en küçük** doğal sayı kaçtır?

**ÇÖZÜM:**  $A = 12a + 6 = 16b + 10$

Yukarıdaki soruda olduğu gibi bu soruda da sayılar rastgele seçilmemiştir. Her iki durumda da bir ortaklık mevzubahistir.

Bir önceki soruda her üç durum için 2 fazlalık vardı ortak olarak, bu soruda da dikkat edersek sayımız eğer 6 daha fazla olsaydı 12 ye de 16 ya da tam bölünebilecekti. Yani sayımız 6 eksik olmasaydı 12 ve 16 nın **ortak katı** olacaktı.

$$\text{OKEK}(12,16) = 48$$

$$48 - 6 = 42$$

**ÖRNEK:** Üç hemşire sırasıyla 4, 8, 10 günde bir gece nöbetine kalmaktadır. İlk nöbetlerine birlikte başlayan üç hemşire tekrar kaç gün sonra birlikte nöbet tutarlar?

**ÇÖZÜM:** İlk gün birlikte nöbet tuttıklarına göre yeniden nöbetlerinin çakışmaları için üçünün de nöbet periyotlarının **ortaklaştığı** gün önemlidir. Yani **4, 8 ve 10 un ortak katı bulunmalıdır.**

$$\text{OKEK}(4,8,10) = 40$$

Yani 40 gün sonra tekrar birlikte nöbet tutacaklardır.

**ÖRNEK:** Boyutları 60 m ve 48 m olan bir konferans salonunun zemini eşit büyüklükte olan kare fayanslarla döşenecektir. Buna göre **en az kaç tane fayans gerekmektedir?**

**ÇÖZÜM:** Bu kalıptaki sorularda öğrencinin kafasını karıştıran nokta nerde OBEB nerde OKEK alınacağıdır.

Çok basit bir mantıkla açıklarsak,

Eğer soruda bütünü parçalama veya küçültme işlemi varsa **OBEB**, eğer parçayı bütünleştirme veya büyültme işlemi varsa **OKEK** alınır. Bu örnekte olduğu gibi konferans salonunu küçük fayanslarla döşeme işlemi parçalama işlemidir. Yani **OBEB** alınacaktır.

60 , 48	2	} <b>OBEB(60,48)=12m</b>
30 , 24	2	
15 , 12	3	
<u>5 , 4</u>		

Kare fayansın kenar uzunluğudur.

**İşlem sonunda kalan sayıları çarparsak sonuca ulaşırız.**

$$5 \times 4 = 20$$

en az 20 tane fayans gerekmektedir.



**ÖRNEK:** Boyutları 2 cm, 4 cm ve 5 cm olan kibrit kutularından **en az kaç tane kullanırsak** içi dolu bir küp kutu elde ederiz?

**ÇÖZÜM:** Bu örnekle ise küçük kibrit kutularından büyük küp kutu elde ediliyor. Yani bütünleme işlemi yapılıyor. O nedenle OBEB alınacaktır.

$$\begin{array}{r|l} 2, 4, 5 & 2 \\ 1, 2, 5 & 2 \\ 1, 1, 5 & 5 \\ 1, 1, 1 & \end{array}$$

$$\text{OKEK } (2, 4, 5) = 2 \times 2 \times 5 = 20$$

Sonuçta oluşturacağımız küp kutunun bir kenar uzantısı 20 cm olacaktır.

20 cm ayrıtlara kaçar tane kibrit kutusunun yerleşebileceğini bulmak için, küp kutunun ayrıtları kibritin ayrıtlarına bölmemiz gerekecektir.

$$\frac{20}{2} \cdot \frac{20}{4} \cdot \frac{20}{5} = 10 \cdot 5 \cdot 4 = 200 \text{ tane kibrit kutusu gerekmektedir.}$$

#### Neden çarpma işlemi yapıldı?

Her soruda çarpma işlemi yapılacaktır diye bir kural yoktur. Soruların köküne bakıldığında; İlk soruda uzunlukları verilen zemininin içi fayanslarla doldurulacağı için alan formülü uygulanmıştır. İkinci soruda üç ayrıtlı verilen kutulardan kare küp elde edileceği için küpün hacim formülü uygulanmıştır.

**ÖRNEK:** Kenar uzunlukları 72 m ve 60 m olan dikdörtgen şeklindeki tarlanın **çevresine ve köşelerine** eşit aralıklarla ağaç dikilecektir. Buna göre **en az kaç ağaç gerekir?**

**ÇÖZÜM:** Bu soruda parçalama işlemi vardır. O nedenle **OBEB** alınacaktır.

Ayrıca burada bizden tarlanın etrafına yani çevresine ağaç dikmemiz istendiği için çevre formülü uygulanacaktır. Eğer tarlanın içine dikim işlemi istenseydi alan formülü uygulanacaktı.

$$\begin{array}{r|l} 72, 60 & 12 \\ 36, 30 & 6 \\ 18, 15 & 3 \\ 6, 5 & \end{array}$$

$$\text{OBEB } (72, 60) = 12$$

**Ağaçlar arasındaki mesafe en çok 12 metre olacaktır.**

İşlem sonunda kalan sayılardan çevre formülü uygularsak.

$$\text{Dik.Dört. Çevresi} = 2(x + y) = 2(5 + 6) = 22$$

Bu tarlaya en uzak eşit aralıklarla ve köşelerde bulunmak üzere en az 22 tane ağaç dikilebilir.

## UYGULAMA SORULARI

1. Beş basamaklı **ABAB7** sayısının iki basamaklı **AB** sayısına bölündüğünde oluşacak bölüm ile kalanın toplamı kaçtır?

$$\begin{array}{r|l} x & 2 \\ - & y \\ \hline & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} y & 3 \\ - & z \\ \hline & 2 \end{array}$$

Yukarıdaki bölme işlemine göre **x** in **z** cinsinden değeri nedir?

3. Üç basamaklı rakamları birbirinden farklı en büyük **üç bölünebilen çift sayı kaçtır?**

4. **2342 x 15823** çarpımının **9** ile bölümünden kalan kaçtır?

5.  $y \neq 0$  rakamları farklı beş basamaklı **1y47z** sayısı **36** sayısına tam bölünüyor. Buna göre **y sayısı hangi değeri alır?**

6.  $120 \cdot n = x^2$  ifadesi verildiğine göre **n en az hangi değeri alır?**

7.  $k, m \in \mathbb{Z}^+$  olduğuna göre,

$$k = \frac{3m + 18}{m}$$

**m nin alabileceği kaç farklı değer vardır?**

8. 3 ile 333 arasında hem 4'e hem de 6'ya bölünebilen **kaç tam sayı vardır?**

9.  $A = 4a + 1 = 5b + 2 = 6c + 3$  ifadesi verildiğine göre **A sayısı en az hangi değeri alır?**

10. 15 m, 20 m, 25 m boyutlarındaki bir depoya boşluk kalmayacak şekilde **en az kaç tane küp şeklinde koli yerleştirilir?**

11. Ayrıtlarının uzunluğu 3 cm, 4 cm ve 9 cm olan tuğlalardan **en az kaç tane kullanarak küp şeklinde duvar örülür?**

12. Ağırlıkları 20 kg, 24 kg, 28 kg olan farklı kalitedeki üç torba buğday hiç artmayacak ve birbirine karışmayacak şekilde paketlere doldurulacaktır.

**Poşetlere konan ağırlıklar eşit olacağına göre en az kaç adet poşet kullanılır?**

**Cevaplar**

- |         |                 |        |
|---------|-----------------|--------|
| 1) 1017 | 2) $x = 6z + 5$ | 3) 984 |
| 4) 2    | 5) 9            | 6) 30  |
| 7) 6    | 8) 27           | 9) 57  |
| 10) 60  | 11) 432         | 12) 18 |

# ÇARPANLARA AYIRMA

Matematiğin olmazsa olmaz konularından biri de Çarpanlara Ayırma konusudur. İleride işleyeceğimiz konuların çoğunun içinde bu bilgilerden yararlanılarak çözümler yapılacaktır. O önemle üzerinde ısrarla durulmasında önem vardır. Zor gibi görünen konuyu daha basit hale getirmek için bazı gereksiz ayrıntılardan ve kalıplardan uzak tuttuk, tabii ki geniş bir konu fakat en önemli ve ağırlıklı yanlarını öne aldık.

## Çarpanlara ayırma işleminin önemi nedir?

İki önemli nedeni vardır.

- 1- Toplama çıkarma işlemindeki denklemleri çarpma haline getirerek sadeleştirme işlemi yapılmasını sağlar.
- 2- Denklemlerinin derecelerini küçültme işlemini sağlayarak basit hale dönüştürmemizi sağlar.

Bu konuyu 4 ana madde şeklinde sınıflandıracacağız.

### 1. Ortak Parantez

Birden çoklu denklemlerde, bütün bilinmeyen elemanlar içerisinde ortak elemanlar var ise bu denklemlere ortak parantez işlemi uygulanır.

**ÖRNEK:**  $3a^2b + 6ab^2$  ifadesinin çarpanlara ayrılmış halini bulunuz?

**ÇÖZÜM:** İlk etapta ifadenin rahat görünümü için, denklemin en küçük çarpanlarına kadar ayırılım, tabii bu her sefer bu şekilde yapılırsa çok zaman alır, o nedenle ortak elemanları doğrudan saptanması yararımıza olacaktır.

$$\begin{array}{c} 3a^2b + 6ab^2 \\ \hline 3 \cdot a \cdot a \cdot b + 3 \cdot 2 \cdot a \cdot b \cdot b \end{array}$$

Görüldü gibi her iki bilinmeyende de ortak kavramlar vardır. Bu da  $3ab$  dir. İfadeyi  $3ab$  ortak parantezine alıp kalan değerleri parantez içerisinde göstereceğiz.

$$3ab \cdot (a + 2b)$$

İfadesine ulaşılır. Görüldüğü gibi ifade toplama halindeyken çarpım haline gelmiş ve derecesi 2. dereceden 1. dereceye düşmüştür.

**ÖRNEK:**  $4x^2y - 6xy^2 + 2xy$  ifadesinin çarpanlarına ayrılmış hali nasıldır?

**ÇÖZÜM:** Bu sefer ifadeyi tek tek çarpanlarına ayırmadan hemen bulalım. Zaman bizim için önemli. Her üç bilinmeyen de ortak çarpanı  $2xy$  dir. Yalnız bu ortak çarpan her üçünde bulunmak zorundadır.

$$2xy(2x - 3y + 1)$$

Önemli bir ayrıntı, son denklemin bizzat kendisi ortak ifadeyi oluşturduğu için parantez içerisinde ki temsilîyet hakkını 1 sayısı sağlar.

**ÖRNEK:**  $\frac{k^2 + 2kl}{2l^2 + kl}$

İfadesinin en sade hali nedir?

**ÇÖZÜM:** Bu tür sorulardaki en büyük hata sadeleştirme işlemi yapmaktır. **Sadeleştirme işlemi toplama veya çıkarma işlemlerinde yapılamaz. Sadeleştirme işlemi sadece çarpım ve bölüm işlemlerinde yapılır.**

O nedenle işlemi çarpım durumuna dönüştürmek için pay ve payda bölümünü ortak parantez yoluyla çarpanlarına ayırılım.

$$\frac{k \cdot (k + 2l)}{l \cdot (2l + k)}$$

Parantez içi aynı olduğu için parantez sadeleşir. İşlemin en sade hali,

$$\frac{k}{l}$$

### 2. İki Kare Farkı

$(x)^2 - (y)^2$  şeklindeki ifadelerle denir.

**Çarpanlara ayrılmış hali;**

$$(x)^2 - (y)^2 = (x + y) \cdot (x - y)$$

Şeklinde gösterilir. Yani karesi alınan ifadelerinin toplamı ve farkının birbiriyle çarpımına eşittir.

#### Alıştırma

#  $5^2 - 3^2 = (5 + 3) \cdot (5 - 3) = 8 \cdot 2 = 16$

#  $25 - \frac{1}{25} = 5^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \left(5 + \frac{1}{5}\right) \cdot \left(5 - \frac{1}{5}\right)$

#  $9x^2 - 4y^2 = (3x)^2 - (2y)^2 = (3x + 2y)(3x - 2y)$

#  $\frac{x^2}{9} - 1^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 - 1^2 = \left(\frac{x}{3} + 1\right) \cdot \left(\frac{x}{3} - 1\right)$

#  $\frac{a^2}{16} - \frac{9}{y^2} =$

#  $x^4 - y^4 =$

#  $k^2 - \frac{1}{k^2} =$

#  $105^2 - 95^2 =$

**ÖRNEK:**  $y \neq z$   $\frac{y^2z - z^2y}{y^2 - z^2}$

**İfadesinin sadeleştirilmiş halini bulunuz?**

**ÇÖZÜM:** Bu soruyu şimdiye kadar gördüğümüz iki kural üzerinden çözeceğiz. Şimdi pay ve paydayı ayrı ayrı ele alalım.

$y^2z - z^2y = >$  İki kare farkı gibi görünse de değildir. Çünkü çarpım durumundaki ikinci elemanların kareleri alınmamıştır. O nedenle ortak parantez var mıdır? Evet

$$y^2z - z^2y = yz(y - z) \text{ olur.}$$

$$y^2 - z^2 = (y + z)(y - z). \text{ Yerlerine koyalım}$$

$$\frac{y^2z - z^2y}{y^2 - z^2} = \frac{yz(y - z)}{(y + z)(y - z)} = \frac{yz}{y + z}$$

### 3 . Parantez ( Tam) Kare

$(x + y)^2$  şeklindeki ifadelerden denir. İki önemli durumu vardır. Bu ifadelerin bir açılımı bir de çarpanlara ayrılmış hali vardır. İkisini de görelim.

<b>Açılımı</b>
$(x \mp y)^2 = x^2 + y^2 \mp 2xy$
<b>Çarpanlara ayırımı</b>
$(x + y)^2 = (x + y)(x + y)$
$(x - y)^2 = (x - y)(x - y)$

**Sorularda hangisini kullanacağımızı iyi saptamamız gerekecektir.**

#### Aıştırma

Aşağıda ki tam karelerin açılımlarını yapınız?

$$(2x - 3)^2 = (2x)^2 + (3)^2 - 2(2x)(3) = 4x^2 + 9 - 12x$$

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{2}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{2}{b}\right) = \frac{a^2}{4} + \frac{4}{b^2} + \frac{2a}{b}$$

$$(5 - 3)^2 =$$

$$\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{p}\right)^2 =$$

**ÖRNEK:**  $a \neq b$   $\frac{a^2 - b^2}{(a - b)^2}$

**İfadesinin sadeleştirilmiş halini bulunuz?**

**ÇÖZÜM:** Pay ve payda kısmı birbirinin aynısıymış gibi görünse de aslında tamamen farklı kavramalardır. Pay bölümü iki kare farkı, payda bölümü tam karedir. Ayrıca sadeleştirme işlemlerinde tam karelerin açılımı yapılmayacaktır. Çarpanlara ayrılmış hali bulunacaktır.

$$\frac{a^2 - b^2}{(a - b)^2} = \frac{(a - b)(a + b)}{(a - b)(a - b)} = \frac{a + b}{a - b}$$

**ÖRNEK:**  $a, b \in \mathbb{N}$

$$a + b = 6$$

$$a \cdot b = 8$$

$a^2 + b^2$  işleminin sonucu kaçtır?

**ÇÖZÜM:** Bize birinci derece denklemler verilerek, ikinci derece denklem sonucu istenmiş. Bu nedenle dereceleri yükselteceğiz.

$$a + b = 6 \quad \text{ifadesinin karesini alalım.}$$

$$(a + b)^2 = (6)^2$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = 36$$

$$a^2 + b^2 + 2 \cdot (8) = 36$$

$$a^2 + b^2 + 16 = 36$$

$$a^2 + b^2 = 20$$

**ÖRNEK:**  $x - \frac{1}{x} = 3$  ise  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  sonucu kaçtır?

**ÇÖZÜM:** Bu kalıp sorulara çok rastlarız. Dikkat edin pay ve payda da ki sayılar aynı bilinmeyenli sayılar olduğu için tam kare alımında birbirilerini sadeleştireceklerdir.

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = (3)^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 9$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 9$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 11$$

### 4. $ax^2 + bx + c$ İfadesinin Çarpanları

En önemli çarpanlara ayırma kalıbıdır diyebiliriz çünkü karşımıza birçok yerde çıkmaktadır, bu nedenle iyi bilinmesi gerekmektedir.

**ÖRNEK:**  $x^2 + 6x + 8$  ifadesinin çarpanları nedir?

**ÇÖZÜM:** İfadenin birinci ve üçüncü terimin çarpanlarına ayrılır.

$$\begin{array}{r} x^2 + 6x + 8 \\ x \quad \quad 4 \\ x \quad \quad 2 \end{array}$$

Özellikle üçüncü terimin birden çok çarpanı olduğu için sağlama işlemi yapmamız gerekmektedir.

Bu nedenle üçüncü terimin işareti (+8) **pozitifse her iki çarpanlarının işaretleri aynıdır.**  
(++ veya --)

Eğer üçüncü terimin işareti **negatif ise her iki çarpanların işaretleri ise ters olacaktır.**  
(+- veya -+)

$$\begin{array}{r} x^2 + 6x + 8 \\ x \quad \quad +4 \\ x \quad \quad +2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 6x + 8 \\ x \quad \quad -4 \\ x \quad \quad -2 \end{array}$$

Sağlama işlemi yaparak hangisinin doğru olduğunu bulalım. Sağlama işlemi şu şekilde yapılır; birinci ve üçüncü terimler çarpılamasına çarpılır ve sonra toplanır. Yapılan toplama işlemi sonrasında ikinci terime hangisinde ulaşılıyorsa o seçenek doğrudur.

$\begin{array}{r} x^2 + 6x + 8 \\ x \quad \quad +4 \\ x \quad \quad +2 \\ \hline +4x + 2x = +6x \end{array}$ <p><b>DOĞRU</b></p>	$\begin{array}{r} x^2 + 6x + 8 \\ x \quad \quad -4 \\ x \quad \quad -2 \\ \hline -4x - 2x = -6x \end{array}$ <p><b>YANLIŞ</b></p>
--	---

İlk ifadenin sağlaması doğru çıktığı için bu seçeneği alıyoruz. Bu sefer çözüm kümesini oluştururken birinci ve üçüncü kavramları yan yana gelecek şekilde parantez içerisine alarak ifadenin çarpanlara ayrılmış haline ulaşıyoruz.

$$\begin{array}{r} x^2 + 6x + 8 \\ x \quad \quad \rightarrow +4 \\ x \quad \quad \rightarrow +2 \end{array}$$

**Çözüm Kümesi (Ç.K)**

$$x^2 + 6x + 8 = (x + 4) \cdot (x + 2)$$

**ÖRNEK:**  $a^2 - a - 12$  ifadesinin çarpanlara ayrılmış halini bulunuz?

**ÇÖZÜM:** İlk bakılacak nokta üçüncü terimin işaretidir. Tüm soru ona göre şekillenecektir. Görüldüğü gibi işaret negatif olduğu için çarpanların işaretleri ters olmak zorundadır.

Şimdi deneme yanılma yoluyla çözüme ulaşalım. İlk denemelerimiz hatalı olsun

$$\begin{array}{r} a^2 - a - 12 \\ a \quad \quad +6 \\ a \quad \quad -2 \\ \hline -2a + 6a = +4a \end{array}$$

Ortada ki terime ulaşamadık. Verilen değerleri değiştirmemiz gerekmektedir.

$$\begin{array}{r} a^2 - a - 12 \\ a \quad \quad +4 \\ a \quad \quad -3 \\ \hline -3a + 4a = a \end{array}$$

Ortada ki terime ulaştık fakat işareti ters bulduk. Bunun anlamı çarpanlarımız doğru sayı fakat işaretleri ters olmalıdır.

$$\begin{array}{r} a^2 - a - 12 \\ a \quad \quad -4 \\ a \quad \quad +3 \\ \hline -4a + 3a = -a \end{array}$$

Demek ki ifademizin çarpanlara ayrılmış hali;

$$a^2 - a - 12 = (a - 4)(a + 3)$$

**Not: Kısa yol sağlaması açısından, üçüncü terimin büyük çarpanının işareti ortadaki terimin işaretiyle aynıdır.**

## Alıştırma

Aşağıdaki ifadelerin çarpanlarına ayrılmış halini bulunuz?

#  $x^2 - 5xy + 6y^2 = (x - 3y)(x - 2y)$

#  $k^2 - 3k + 2 =$

#  $m^2 - 3m - 4 =$

#  $n^2 + 7n - 18 =$

#  $3a^2 + 14a + 8 = (3a + 2)(a + 4)$

#  $12x^2 - 8xy - 15y^2 = (2x - 3y)(6x + 5y)$

#  $20n^2 - 23n + 6 =$

Şimdi buraya kadar gördüğümüz 4 başlıktaki çarpanlara ayırma kurallarını kullanarak yapabileceğimiz soruları çözelim.

**ÖRNEK:**  $\frac{2x^2 + 6x}{x^2 - 3x} \cdot \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} \cdot \frac{(x-3)^2}{2x-6}$

**İfadesinin sadeleştirilmiş halini bulunuz?**

**ÇÖZÜM:** Tek tek bütün ifadeleri çarpanlarına ayırıp sonra işlemde yerlerine koyalım.

$$\Rightarrow 2x^2 + 6x = 2x(x+3)$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x = x(x-3)$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$$

$$\Rightarrow x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = (x-3)(x-3)$$

$$\Rightarrow 2x-6 = 2(x-3)$$

Açılımları yerlerine koyarsak

$$\frac{2x(x+3)}{x(x-3)} \cdot \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{(x-3)(x-3)}{2(x-3)} = x-2$$

### 3. Derece Formüller

Çarpanlara ayırma konusunun temelini oluşturan bölümlerini gördük. Bunlar bilinmesi öncelikli kurallardı. Şimdi ise ağırlıklı olmasa da bazı kaynaklarda ve sorularda karşımıza çıkan ama sınavda sorulma oranı çok düşük olan formülleri vereceğiz. Ezberlemekten ziyade soruları çözdükçe formüllere bakarak soruları çözün.

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a \mp b)^3 = a^3 \mp 3a^2b + 3ab^2 \mp b^3$$

**ÖRNEK:**  $\frac{a^2 - ab - a + b}{a-b}$

**İşleminin sadeleştirilmiş hali nedir?**

**ÇÖZÜM:** Sorunun pay kısmını ortak parantez almanın özel bir bölümü olan gruptandırma yöntemiyle bulacağız.

$$a^2 - ab \quad | \quad a + b$$

İfadeyi ortadan ikiye ayıralım ve ayrı ayrı inceleyelim.

$$a(a-b) - 1(a-b)$$

Şimdide  $(a-b)$  ortak parantezine alalım.

$$(a-b)(a-1)$$

çarpanları bulunur. Yerine konulduğunda;

$$\frac{(a-b)(a-1)}{a-b} = a-1$$

**ÖRNEK:**  $b \in \mathbb{Z}$  olmak üzere;  
 $x^2 + bx - 10 = 0$

**denkleminin köklerinden biri 5 olduğuna göre b kaçtır?**

**ÇÖZÜM:** İkinci derece denklemlerin 2 tane kökü bulunur. Bu kökler denklemden bilinmeyen (x) yerine konduğunda sonuç sıfıra eşit olur.

$$x^2 + bx - 10 = 0$$

$$5^2 + 5b - 10 = 0$$

$$25 + 5b - 10 = 0$$

$$b = -3$$

**ÖRNEK:**  $\frac{a}{\frac{1}{a}-1} + \frac{1}{1-\frac{1}{a}}$

**İşleminin en sade hali nedir?**

**ÇÖZÜM:** Önce payda bölümlerini düzenleyelim.

$$\frac{a}{\frac{1}{a}-1} + \frac{1}{1-\frac{1}{a}}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{a}{\frac{1}{a}-1} + \frac{1}{1-\frac{1}{a}} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{1-a} + \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{a-1} = \frac{a^2}{1-a} + \frac{a}{a-1}$$

Dikkat edin paydalar aynıymış gibi görünse de ters işaretlidir. Paydaları eşitlemek için birin -1 ile çarparsak diğerine benzer.

$$\frac{a^2}{1-a} + \frac{a}{a-1} = \frac{a^2}{1-a} - \frac{a}{1-a} = \frac{a^2 - a}{1-a} = \frac{a(a-1)}{1-a} = -a$$

**ÖRNEK:**  $a = \frac{3b+4}{2b-5}$

**Olduğuna göre b nin a cinsinden değeri nedir?**

**ÇÖZÜM:** Soruda a ın b cinsinden değeri verilmiştir. bizden b nin a cinsinden değeri istendiğine göre b yi tek başına bırakacağız. Önce içler dışlar çarpanı yapacağız

$$a(2b-5) = 3b+4$$

$$2ab-5a = 3b+4$$

$$2ab-3b = 4+5a$$

$$b(2a-3) = 5a+4$$

$$b = \frac{5a+4}{2a-3}$$

b nin a cinsinden ifadesidir.

## UYGULAMA SORULARI

1. 
$$\frac{(a-2)^2 - 4}{(a+2)^2 - 4}$$

İfadesinin sadeleştirilmiş hali nedir?

2. 
$$\frac{k^2 - p^2}{k^2 + kp}$$

İfadesinin sadeleştirilmiş hali nedir?

3.  $x^2 + \frac{1}{x^2} = 47$  ise  $x + \frac{1}{x}$  kaçtır?

4.  $a^2 - a - 1 = 0$  ise  $a + \frac{1}{a}$  kaçtır?

5. 
$$\frac{4x^2 - 4x}{2x^2 - 18} \cdot \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x} \cdot \frac{(x+3)^2}{x^2 + x - 2}$$
  
İşleminin sadeleştirilmiş halini bulunuz?

6. 
$$\frac{a^2 - a - 6}{2a - 14} \cdot \frac{a^2 - 49}{a - 3} \div \frac{a^2 + 9a + 14}{2}$$

İşleminin sadeleştirilmiş halini bulunuz?

7. 
$$\begin{aligned} x - y &= 12 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} &= 4 \\ \sqrt{x} &=? \end{aligned}$$

8.  $x - y = y - z = 3$  olduğuna göre  $x^2 + z^2 - 2y^2$  sonucu kaçtır?

9.  $\sqrt{101 \cdot 149 - 99 \cdot 151}$  işleminin sonucu kaçtır?

10. 
$$\frac{5x - 5}{x^2 - x - 6} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 2}$$

Olduğuna göre A+B kaçtır?

11.  $a = 3\sqrt{3} + 1$  olduğuna göre  $a^2 - 2a - 3$  ifadesinin sonucu kaçtır?

### CEVAPLAR

- |                      |                    |                  |               |
|----------------------|--------------------|------------------|---------------|
| 1) $\frac{a-4}{a+4}$ | 2) $\frac{k-p}{k}$ | 3) 7             | 4) $\sqrt{5}$ |
| 5) 2                 | 6) 1               | 7) $\frac{7}{2}$ | 8) 18         |
| 9) 10                | 10) 5              | 11) 23           |               |